线性代数
第四章：行列式

宿州学院　数学与统计学院

目录

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 可以作分割

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 可以作分割 } \left(\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ & \\ & \end{matrix}\right.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&1&2&0\\-1&2&0&2\end{pmatrix}\text{ 可以作分割 }\left(\begin{array}{cccc}3&0&0&0\\0&3&0&0\\&&&\\&&&\end{array}\right.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{可以作分割} \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ & \\ & \end{array} \right.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{可以作分割} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{可以作分割} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

记$A_{11}=\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$,

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{可以作分割} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

记$A_{11} = \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$, $A_{12} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$,

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{可以作分割} \begin{pmatrix} 3 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 3 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 2 & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

记$A_{11}=\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$, $A_{12}=\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$, $A_{21}=\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$,

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

初等变换(初等行变换和初等列变换)化行列式为三角形行列式可以计算行列式。行列式的计算还有另外一种方法，即行列式的展开定理.

先引入分块矩阵的概念.所谓分块矩阵，就是将矩阵按需要分割成若干个子块.如

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 可以作分割 } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

记$A_{11}=\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$, $A_{12}=\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$, $A_{21}=\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$, $A_{22}=\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ & \\ & \end{array} \right.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ -1 & 2 & & \end{array}\right.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵的分块是为了突出矩阵的特征，使得矩阵的表述更为简洁.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵的分块是为了突出矩阵的特征，使得矩阵的表述更为简洁.如上面的矩阵A，经过分块以后，其特征更为鲜明，子块A_{11}和A_{22}都是数量阵，

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵的分块是为了突出矩阵的特征，使得矩阵的表述更为简洁.如上面的矩阵A，经过分块以后，其特征更为鲜明，子块A_{11}和A_{22}都是数量阵，即$A_{11} = 3I_2$，$A_{22} = 2I_2$，

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵的分块是为了突出矩阵的特征，使得矩阵的表述更为简洁.如上面的矩阵A，经过分块以后，其特征更为鲜明，子块A_{11}和A_{22}都是数量阵，即$A_{11}=3I_2$，$A_{22}=2I_2$，而子块A_{12}则是0子块.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵的分块是为了突出矩阵的特征，使得矩阵的表述更为简洁.如上面的矩阵A，经过分块以后，其特征更为鲜明，子块A_{11}和A_{22}都是数量阵，即$A_{11}=3I_2$，$A_{22}=2I_2$，而子块A_{12}则是0子块.利用分块矩阵，A表述为$A=\begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ A_{21} & 2I_2 \end{pmatrix}$，

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则矩阵A可以记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵的分块是为了突出矩阵的特征，使得矩阵的表述更为简洁.如上面的矩阵A，经过分块以后，其特征更为鲜明，子块A_{11}和A_{22}都是数量阵，即$A_{11}=3I_2$，$A_{22}=2I_2$，而子块A_{12}则是0子块.利用分块矩阵，A表述为$A=\begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ A_{21} & 2I_2 \end{pmatrix}$，这种表述简洁明快的揭示了矩阵$A$的特征.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

分块矩阵还可以按照普通矩阵一样进行运算.如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

分块矩阵还可以按照普通矩阵一样进行运算.如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

分块矩阵还可以按照普通矩阵一样进行运算.如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

分块矩阵还可以按照普通矩阵一样进行运算.如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

是两个具有相同分块的4×5 矩阵，则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

即，具有相同分块矩阵的两矩阵之和仍是一个分块矩阵，且只要将其对应子块按矩阵的加法相加.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

即，具有相同分块矩阵的两矩阵之和仍是一个分块矩阵，且只要将其对应子块按矩阵的加法相加. 再如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

即，具有相同分块矩阵的两矩阵之和仍是一个分块矩阵，且只要将其对应子块按矩阵的加法相加. 再如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

即，具有相同分块矩阵的两矩阵之和仍是一个分块矩阵，且只要将其对应子块按矩阵的加法相加. 再如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

即，具有相同分块矩阵的两矩阵之和仍是一个分块矩阵，且只要将其对应子块按矩阵的加法相加. 再如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$\text{则} AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$

即，子块阶数符合矩阵乘法要求的分块矩阵之积仍是一个分块矩阵，且其每一个子块也是相应子块按照矩阵乘法规则相乘所得到的子块.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

即，子块阶数符合矩阵乘法要求的分块矩阵之积仍是一个分块矩阵，且其每一个子块也是相应子块按照矩阵乘法规则相乘所得到的子块.

要特别注意的是：分块矩阵的运算，其分块必须符合矩阵运算的要求才可以计算.如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$

即，子块阶数符合矩阵乘法要求的分块矩阵之积仍是一个分块矩阵，且其每一个子块也是相应子块按照矩阵乘法规则相乘所得到的子块.

要特别注意的是：分块矩阵的运算，其分块必须符合矩阵运算的要求才可以计算.如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

则$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

即，子块阶数符合矩阵乘法要求的分块矩阵之积仍是一个分块矩阵，且其每一个子块也是相应子块按照矩阵乘法规则相乘所得到的子块.

要特别注意的是：分块矩阵的运算，其分块必须符合矩阵运算的要求才可以计算.如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\alpha_1\right.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m\times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m\times n$矩阵A进行的列分块，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX = b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1 +$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX = b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 +$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m\times n$矩阵A进行的列分块，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX=b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX = b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m\times n$矩阵A进行的列分块，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX=b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b,$$

矩阵与列分块矩阵相乘，积矩阵也是一个列分块矩阵，即

$$BA=B\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX = b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

矩阵与列分块矩阵相乘，积矩阵也是一个列分块矩阵，即

$$BA = B\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\alpha_1 \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m\times n$矩阵A进行的列分块，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX=b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b,$$

矩阵与列分块矩阵相乘，积矩阵也是一个列分块矩阵，即

$$BA=B\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B\alpha_1 & B\alpha_2$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m \times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX = b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

矩阵与列分块矩阵相乘，积矩阵也是一个列分块矩阵，即

$$BA = B\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\alpha_1 & B\alpha_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵A, B 都是2×2 分块矩阵，但作为分块矩阵，它们既不能做加法，也不能做乘法.

再如，$m\times n$矩阵A进行的列分块，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

则以A 为系数矩阵的线性方程组$AX = b$，按照分块矩阵的乘法可以表述为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

矩阵与列分块矩阵相乘，积矩阵也是一个列分块矩阵，即

$$BA = B\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\alpha_1 & B\alpha_2 & \cdots & B\alpha_n \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵B与矩阵A的第k列α_k相乘，得积矩阵BA的第k列$B\alpha_k$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵B与矩阵A的第k列α_k相乘，得积矩阵BA的第k列$B\alpha_k$.

不证明的给出如下引理

引理4.1设P 是n 阶初等矩阵，则分块矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ 是$n+1$ 阶初等矩阵，且$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \det P$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

矩阵B与矩阵A的第k列α_k相乘，得积矩阵BA的第k列$B\alpha_k$.

不证明的给出如下引理

引理4.1设P 是n 阶初等矩阵，则分块矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ 是$n+1$阶初等矩阵，且$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \det P$.

引理4.2设$A = (a_{ij})_{n\times n} \in F^{n\times n}$ ，$\alpha \in F^{1\times n}$ ，则对分块矩阵$B = \begin{pmatrix} b & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ，有$\det B = \det \begin{pmatrix} b & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} = b \det A$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

转置不改变行列式的值。

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

转置不改变行列式的值。

分块矩阵$\begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix}$，$\det\begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix} = b\det A.$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

转置不改变行列式的值。

分块矩阵$\begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix}$，$\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix} = b \det A.$

如下引入余子式和代数余子式的概念.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

转置不改变行列式的值。

分块矩阵$\begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix}$，$\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix} = b \det A$.

如下引入余子式和代数余子式的概念.

定义4.2 设$\det A = \det[(a_{ij})_{n\times n}]$，在矩阵$A$中删除元素$a_{ij}$所在的第$i$行、第$j$列，余下$(n-1)^2$个元素按照原来的相对位置定义一个$n-1$阶行列式，称为元素$a_{ij}$的余子式，记作$M_{ij}$.

记$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元素$a_{ij}$的代数余子式.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例如，三阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

每一个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式。共9个代数余子式，它们分别是：

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例如，三阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

每一个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式。共9个代数余子式，它们分别是：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例如，三阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

每一个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式。共9个代数余子式，它们分别是：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例如，三阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

每一个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式。共9个代数余子式，它们分别是：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例如，三阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

每一个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式。共9个代数余子式，它们分别是：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例如，三阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

每一个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式。共9个代数余子式，它们分别是：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例如，三阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

每一个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式。共9个代数余子式，它们分别是：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

引理4.3设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即矩阵A的第i行只有一个非0元素a_{ij}，则$\det A=a_{ij}A_{ij}$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

行列式的按行展开定理，即，本节的主要定理.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

行列式的按行展开定理，即，本节的主要定理.

定理4.3 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，则对任意的$1 \le i \le n$，都有

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

行列式的按行展开定理，即，本节的主要定理.

定理4.3 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则对任意的$1\le i\le n$，都有

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

定理4.3称为行列式按行(第i 行)展开定理.

仅以三阶行列式按第2 行展开为例，说明上述定理成立.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

行列式的按行展开定理，即，本节的主要定理.

定理4.3 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，则对任意的$1 \le i \le n$，都有

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

定理4.3称为行列式按行(第i 行)展开定理.

仅以三阶行列式按第2 行展开为例，说明上述定理成立.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

行列式的按行展开定理，即，本节的主要定理.

定理4.3 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则对任意的$1\le i\le n$，都有

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

定理4.3称为行列式按行(第i 行)展开定理.

仅以三阶行列式按第2 行展开为例，说明上述定理成立.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+0 & 0+a_{22} & 0+a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0+0 & a_{22}+0 & 0+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0+0 & a_{22}+0 & 0+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0+0 & a_{22}+0 & 0+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0+0 & a_{22}+0 & 0+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

$$+ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

转置不改变行列式的值。行列式按第i 列的展开定理.

定理4.4 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则对任意的$1\leq i\leq n$，都有

$$\det A=a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

转置不改变行列式的值。行列式按第i 列的展开定理.

定理4.4 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则对任意的$1\le i\le n$，都有

$$\det A = a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}.$$

比较如下两个行列式

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

转置不改变行列式的值。行列式按第i 列的展开定理.

定理4.4 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则对任意的$1\le i\le n$，都有

$$\det A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}.$$

比较如下两个行列式

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

它们除第j 行元素以外，其余各行元素均相同，所以，$\det A$ 与$\det B$ 第j行相应位置元素的代数余子式是相同的.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

它们除第j 行元素以外，其余各行元素均相同，所以，$\det A$ 与$\det B$ 第j行相应位置元素的代数余子式是相同的.

记$A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn}$ 是$\det A$ 第j 行元素的代数余子式，它们也是$\det B$ 第j 行相应位置元素的代数余子式.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

它们除第j 行元素以外，其余各行元素均相同，所以，$\det A$ 与$\det B$ 第j行相应位置元素的代数余子式是相同的.

记$A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn}$ 是$\det A$ 第j 行元素的代数余子式，它们也是$\det B$ 第j 行相应位置元素的代数余子式.

注意到$\det B$ 有两行元素相同，所以$\det B = 0$.将$\det B$ 按第j 行展开，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

它们除第j 行元素以外，其余各行元素均相同，所以，$\det A$ 与$\det B$ 第j行相应位置元素的代数余子式是相同的.

记$A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn}$ 是$\det A$ 第j 行元素的代数余子式，它们也是$\det B$ 第j 行相应位置元素的代数余子式.

注意到$\det B$ 有两行元素相同，所以$\det B = 0$.将$\det B$ 按第j 行展开，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

将上式放在$\det A$ 中解释，就是$\det A$ 中第i 行元素与第j 行元素$(i \neq j)$的代数余子式对应乘积的和等于0 .

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

它们除第j 行元素以外，其余各行元素均相同，所以，$\det A$ 与$\det B$ 第j行相应位置元素的代数余子式是相同的.

记$A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn}$ 是$\det A$ 第j 行元素的代数余子式，它们也是$\det B$ 第j 行相应位置元素的代数余子式.

注意到$\det B$ 有两行元素相同，所以$\det B = 0$.将$\det B$ 按第j 行展开，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

将上式放在$\det A$ 中解释，就是$\det A$ 中第i 行元素与第j 行元素$(i \neq j)$的代数余子式对应乘积的和等于0 .

与定理4.3相结合，并注意行列式对行成立的性质对列也成立，则有

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

定理4.5设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij}为$\det A$中元素a_{ij}的代数余子式，则

$$a_{l1}A_{k1}+a_{l2}A_{k2}+\cdots+a_{ln}A_{kn}=\begin{cases}\det A & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1k}+a_{2l}A_{2k}+\cdots+a_{nl}A_{nk}=\begin{cases}\det A & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例4.3 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求$\det A$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

例4.3 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求$\det A$.

解 由于A 的第五行有3 个0 元素，所以将$\det A$ 按第五行展开计算时，只要计算两个四阶行列式

$$\det A = a_5\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + b_5(-1)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

而

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_4(-1)\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

而

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_4(-1)\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4(-1)\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

而

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_4(-1)\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4(-1)\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以$\det A = 0.$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

由定理4.5，可得到可逆矩阵A 的逆矩阵的另一种求法.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

由定理4.5，可得到可逆矩阵A 的逆矩阵的另一种求法.

定义4.3设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个n 阶矩阵，A_{ij} 是$\det A$ 中元素a_{ij} 的代数余子式.构作n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A 的伴随矩阵.记作A^* .

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A) I_n.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I_n.$$

即，$AA^* = A^*A = (\det A)I_n.$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*) = (\frac{1}{\det A}A^*)A = I_n.$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*) = (\frac{1}{\det A}A^*)A = I_n$.
所以$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*) = (\frac{1}{\det A}A^*)A = I_n$.
所以$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$.

定理4.6设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，则A可逆当且仅当$\det A \neq 0$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*) = (\frac{1}{\det A}A^*)A = I_n$.
所以$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$.

定理4.6设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，则A可逆当且仅当$\det A \neq 0$.
在$\det A \neq 0$时，$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵.

例4.4 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*) = (\frac{1}{\det A}A^*)A = I_n$.

所以$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$.

定理4.6设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，则A可逆当且仅当$\det A \neq 0$.

在$\det A \neq 0$时，$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵.

例4.4 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*) = (\frac{1}{\det A}A^*)A = I_n$.
所以$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$.

定理4.6设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，则A可逆当且仅当$\det A \neq 0$.
在$\det A \neq 0$时，$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵.

例4.4 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解 计算$\det A$ 以及每个元素的代数余子式.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*) = (\frac{1}{\det A}A^*)A = I_n$.
所以$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$.

定理4.6设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，则A可逆当且仅当$\det A \neq 0$.
在$\det A \neq 0$时，$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵.

例4.4 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解 计算$\det A$ 以及每个元素的代数余子式.

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A\neq 0$ 时，有$A(\frac{1}{\det A}A^*)=(\frac{1}{\det A}A^*)A=I_n$.

所以$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$.

定理4.6设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则A可逆当且仅当$\det A\neq 0$.

在$\det A\neq 0$时，$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵.

例4.4 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解 计算$\det A$ 以及每个元素的代数余子式.

$$\det A=\det\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\0&3&-5\end{pmatrix}.$$

$$=\det\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\0&0&-14\end{pmatrix}=-14$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3,$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-3$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}=-5,$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=1$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

所以$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$所以A^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = (-\frac{1}{14})A^*$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

$$\text{所以}A^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = (-\frac{1}{14})A^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

所以$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = (-\frac{1}{14})A^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

利用行列式的展开定理，可给出由n 个方程构成的n 元线性方程组在其系数矩阵的行列式不为0 时的公式解，

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

所以$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$，

$$A^{-1} = (-\frac{1}{14})A^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

利用行列式的展开定理，可给出由n 个方程构成的n 元线性方程组在其系数矩阵的行列式不为0 时的公式解，即线性方程组的克兰姆法则.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

定理4.7(克兰姆法则)设n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases},$$

记作$AX = b$. 其中，b 为方程组的常数列，A 为其系数矩阵，$\det A$ 为其系数行列式.

设A_{ij} 为$\det A$ 的元素a_{ij} 的代数余子式.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

定理4.7(克兰姆法则)设n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases},$$

记作$AX = b$. 其中，b 为方程组的常数列，A 为其系数矩阵，$\det A$ 为其系数行列式.

设A_{ij} 为$\det A$ 的元素a_{ij} 的代数余子式.记A_k 是矩阵A 中的第k 列用方程组的常数列替换而得到的矩阵，则$\det A_k$ 的第k 列元素与$\det A$ 第k 列的相同位置的元素有相同的代数余子式，将$\det A_k$ 按第k 列展开，则

$$\det A_k = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A} \end{cases}.$$

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A} \end{cases}.$$

推论4.2

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A} \end{cases}$.

推论4.2n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = 0 \end{cases},$$

当其系数行列式$\det A \neq 0$ 时，它有唯一的0 解；

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

当$\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A} \end{cases}.$$

推论4.2n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = 0 \end{cases},$$

当其系数行列式$\det A \neq 0$ 时，它有唯一的0 解；
当其系数行列式$\det A = 0$ 时，它有非0 解.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

由推论4.2以及向量组线性相关性，得到

推论4.3

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

由推论4.2以及向量组线性相关性，得到

推论4.3

n 阶方阵A 的列向量线性无关当且仅当$\det A \neq 0$.

4.3 n阶行列式的展开定理、克拉姆法则

由推论4.2以及向量组线性相关性，得到

推论4.3

n 阶方阵A 的列向量线性无关当且仅当$\det A \neq 0$.

n 阶方阵A 的列向量线性相关当且仅当$\det A = 0$.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com