线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院

目录

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

前一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

有解的充要条件.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

前一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

有解的充要条件.那么，向量组的秩如何求？

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

前一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

有解的充要条件.那么，向量组的秩如何求？

定理3.8 初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

前一节中，利用向量组的秩概念，给出了线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

有解的充要条件.那么，向量组的秩如何求？

定理3.8 初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性.即，

假设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$是$n \times m$ 矩阵A的列向量组。对A 实施初等行变换得到矩阵B ，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$是矩阵$B$的列向量组.

任取B 的第$j_1, j_2, ..., j_k$列$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ..., \beta_{j_k}$ ，其对应矩阵A的列向量组为 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_k}$.

若$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ..., \beta_{j_k}$线性相关，则$\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_k}$也线性相关，

若$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ..., \beta_{j_k}$线性无关，则$\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_k}$也线性无关.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

任何一个$n \times m$矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

任何一个$n \times m$矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

在规范阶梯形矩阵中，由于主元所在的列构成了F^n 的规范单位向量组的一个部分组，一定线性无关.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

任何一个$n \times m$矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

在规范阶梯形矩阵中，由于主元所在的列构成了F^n 的规范单位向量组的一个部分组，一定线性无关.

初等行变换不改变矩阵列向量的线性相关性， 所以

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

任何一个$n\times m$矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

在规范阶梯形矩阵中，由于主元所在的列构成了F^n 的规范单位向量组的一个部分组，一定线性无关.

初等行变换不改变矩阵列向量的线性相关性， 所以

定理3.9 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是$n\times m$ 矩阵A的列向量组，经过初等行变换化为规范阶梯形矩阵.

假设其有r 个主元，且主元所在的列是第$k_1,k_2,\ldots,k_r$ 列，则矩阵A的列向量组的秩为r ，且$\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\ldots,\alpha_{k_r}$是$A$ 的列向量组的一个极大线性无关组.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

任何一个$n \times m$矩阵经过初等行变换，都可以化为阶梯形或者规范阶梯形矩阵.

在规范阶梯形矩阵中，由于主元所在的列构成了F^n 的规范单位向量组的一个部分组，一定线性无关.

初等行变换不改变矩阵列向量的线性相关性， 所以

定理3.9 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$是$n \times m$ 矩阵A的列向量组，经过初等行变换化为规范阶梯形矩阵.

假设其有r 个主元，且主元所在的列是第$k_1, k_2, ..., k_r$ 列，则矩阵A的列向量组的秩为r ，且$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, ..., \alpha_{k_r}$是$A$ 的列向量组的一个极大线性无关组.

定理3.9 也给出了求向量组的秩以及极大线性无关组的一种方法.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是F^n中的向量组，以$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$为列向量组构成一个$n \times m$矩阵$A$，

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是F^n中的向量组，以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$为列向量组构成一个$n \times m$矩阵$A$，对$A$ 实施初等行变换，将其化成阶梯形矩阵，

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是F^n中的向量组，以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$为列向量组构成一个$n \times m$矩阵$A$，对$A$ 实施初等行变换，将其化成阶梯形矩阵，

则阶梯形矩阵中主元个数即为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的秩，且主元所对应的矩阵A 的列向量即为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的一个极大线性无关组.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是F^n中的向量组，以$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$为列向量组构成一个$n \times m$矩阵$A$ ，对A 实施初等行变换，将其化成阶梯形矩阵，

则阶梯形矩阵中主元个数即为向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的秩，且主元所对应的矩阵A 的列向量即为向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的一个极大线性无关组.

定义3.6 矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A 的秩.记作$r(A)$.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 是F^n中的向量组，以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$为列向量组构成一个$n\times m$矩阵$A$，对$A$ 实施初等行变换，将其化成阶梯形矩阵，

则阶梯形矩阵中主元个数即为向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的秩，且主元所对应的矩阵A 的列向量即为向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的一个极大线性无关组.

定义3.6 矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A 的秩.记作$r(A)$.

例3.10 已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

求它的秩以及它的一个极大线性无关组.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解　以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & -4 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解　以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & -4 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 15 & -6\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ & & & \end{matrix}\right.$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解　以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\1&-1&2&-1\\4&-4&3&-2\end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&5&-2\\0&0&15&-6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&5&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

在阶梯形矩阵中，有两个主元，且主元分别在第1列和第3列，

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

解 以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组构作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

对矩阵A实施初等行变换，将矩阵A 化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在阶梯形矩阵中，有两个主元，且主元分别在第1列和第3列，所以向量组的秩为2，且α_1, α_3是其一个极大线性无关组.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解 对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

A

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解 对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解 对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & \lambda & -1 & 2\end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解 对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & \lambda & -1 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解 对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & \lambda & -1 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解　对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & \lambda & -1 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解 对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & \lambda & -1 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.11 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩.其中，$\lambda$是任意数.

解 对矩阵A实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & \lambda & -1 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 0 & 0 & \frac{1}{21}(\lambda-10)(\lambda+12)+5 & \frac{1}{7}(\lambda-10)+1\end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$\frac{1}{21}(\lambda-10)(\lambda+12)+5=\frac{1}{21}(\lambda+5)(\lambda-3)\neq 0$，
即$\lambda\neq -5$且$\lambda\neq 3$ 时，

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$\frac{1}{21}(\lambda-10)(\lambda+12)+5=\frac{1}{21}(\lambda+5)(\lambda-3)\neq 0$，
即$\lambda\neq -5$且$\lambda\neq 3$ 时，矩阵A 所化阶梯形矩阵的主元个数为3，
这时$r(A)=3$ ；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$\frac{1}{21}(\lambda-10)(\lambda+12)+5=\frac{1}{21}(\lambda+5)(\lambda-3)\neq 0$，即$\lambda\neq -5$且$\lambda\neq 3$ 时，矩阵A 所化阶梯形矩阵的主元个数为3，这时$r(A)=3$ ；

当$\lambda=-5$时，$\frac{1}{7}(\lambda-10)+1=\frac{1}{7}(\lambda-3)\neq 0$ ，矩阵A所化阶梯形矩阵的主元个数为3，这时$r(A)=3$ ；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$\frac{1}{21}(\lambda-10)(\lambda+12)+5=\frac{1}{21}(\lambda+5)(\lambda-3)\neq 0$，即$\lambda\neq -5$且$\lambda\neq 3$ 时，矩阵A 所化阶梯形矩阵的主元个数为3，这时$r(A)=3$；

当$\lambda=-5$时，$\frac{1}{7}(\lambda-10)+1=\frac{1}{7}(\lambda-3)\neq 0$，矩阵$A$所化阶梯形矩阵的主元个数为3，这时$r(A)=3$；

当$\lambda=3$ 时，$\frac{1}{7}(\lambda-10)+1=\frac{1}{7}(\lambda-3)=0$，矩阵$A$ 所化阶梯形矩阵的主元个数为2，这时$r(A)=2$.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta,$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta,$$

其系数矩阵A的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，增广矩阵$\bar{A}$的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta,$$

其系数矩阵A的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，增广矩阵$A$的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$．由于

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$有解

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta,$$

其系数矩阵A的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ，增广矩阵A的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$. 由于

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$有解

$\Leftrightarrow \beta$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出(向量线性表出的定义)

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta,$$

其系数矩阵A的列向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$，增广矩阵$\bar{A}$的列向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta$．由于

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$有解

$\Leftrightarrow\beta$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性表出(向量线性表出的定义)

$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta$有相同的秩(定理3.6)

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta,$$

其系数矩阵A的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，增广矩阵$A$的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$．由于

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$有解

$\Leftrightarrow \beta$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出(向量线性表出的定义)

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$有相同的秩(定理3.6)

$\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A})$(矩阵秩的定义).

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

对n个方程m个未知量构成的线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta,$$

其系数矩阵A的列向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$，增广矩阵$A$的列向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta$．由于

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$有解

$\Leftrightarrow \beta$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性表出(向量线性表出的定义)

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta$有相同的秩(定理3.6)

$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$(矩阵秩的定义).

定理3.10 线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$的系数矩阵为$A$，增广矩阵为$\overline{A}$，

则方程组有解的充要条件是$r(A)=r(\overline{A})$．

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数，则方程组有唯一解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数，则方程组有唯一解；

若$r(A)=r(\overline{A})<$ 未知量个数，则方程组有无穷多解.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A)=r(\overline{A})<$ 未知量个数，则方程组有无穷多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一部分，

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A)=r(\overline{A})<$ 未知量个数，则方程组有无穷多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一部分，而初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行变换，将其化为阶梯形，就可以同时求出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})$ =未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A)=r(\overline{A})<$ 未知量个数，则方程组有无穷多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一部分，而初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行变换，将其化为阶梯形，就可以同时求出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

若阶梯形矩阵中最后一列没有主元，则有$r(A)=r(\overline{A})$ ，方程组有解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

若$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A)=r(\overline{A})<$ 未知量个数，则方程组有无穷多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一部分，而初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行变换，将其化为阶梯形，就可以同时求出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

若阶梯形矩阵中最后一列没有主元，则有$r(A)=r(\overline{A})$ ，方程组有解；

若阶梯形矩阵的最后一列存在主元，则$r(A)+1=r(\overline{A})$ ，方程组无解.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

若$r(A) = r(\overline{A})$ =未知量个数，则方程组有唯一解；
若$r(A) = r(\overline{A}) <$ 未知量个数，则方程组有无穷多解.

注意到A的列向量组是$\overline{A}$ 的列向量组的一部分，而初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性，所以只要对$\overline{A}$ 进行初等行变换，将其化为阶梯形，就可以同时求出$r(A)$ 和$r(\overline{A})$.

若阶梯形矩阵中最后一列没有主元，则有$r(A) = r(\overline{A})$ ，方程组有解；

若阶梯形矩阵的最后一列存在主元，则$r(A) + 1 = r(\overline{A})$ ，方程组无解.

在方程组有解时，则可以进一步比较秩与未知量个数的大小，确定方程组解的情形.

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$ 有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$\overline{A}$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$ 有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a, b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a, b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$ 有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

例3.12 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \\ ax_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$ 有无穷多解？有唯一解？无解？

解 方程组的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$实施初等行变换，化$\overline{A}$ 为阶梯形矩阵

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1-a \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & -b(1-a) & 1-b \end{pmatrix}$$

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$-b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$且$a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$-b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$且$a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b=0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$-b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$且$a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b=0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，而此时若$b\neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$-b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$且$a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b=0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，而此时若$b\neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$且$b=1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=2$ 小于未知量个数，所以方程组有无穷多解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$-b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$且$a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b=0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，而此时若$b\neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$且$b=1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=2$ 小于未知量个数，所以方程组有无穷多解；

所以当$b\neq 0$且$a\neq 1$时，方程组有唯一解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$-b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$且$a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b=0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，而此时若$b\neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$且$b=1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=2$ 小于未知量个数，所以方程组有无穷多解；

所以当$b\neq 0$且$a\neq 1$时，方程组有唯一解；

当$b=0$时，或$a=1$且$b\neq 1$ 时，方程组无解；

3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定

当$-b(1-a)\neq 0$，即$b\neq 0$且$a\neq 1$时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=3$ 等于未知量个数，方程组有唯一解；

当$b=0$时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$ 时，则方程组系数矩阵的秩$r(A)=2$，而此时若$b\neq 1$，有增广矩阵的秩$r(\overline{A})=3$，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a=1$且$b=1$ 时，则方程组系数矩阵A与$\overline{A}$满足$r(A)=r(\overline{A})=2$ 小于未知量个数，所以方程组有无穷多解；

所以当$b\neq 0$且$a\neq 1$时，方程组有唯一解；

当$b=0$时，或$a=1$且$b\neq 1$ 时，方程组无解；

当$a=1$且$b=1$时，方程组有无穷多解.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com